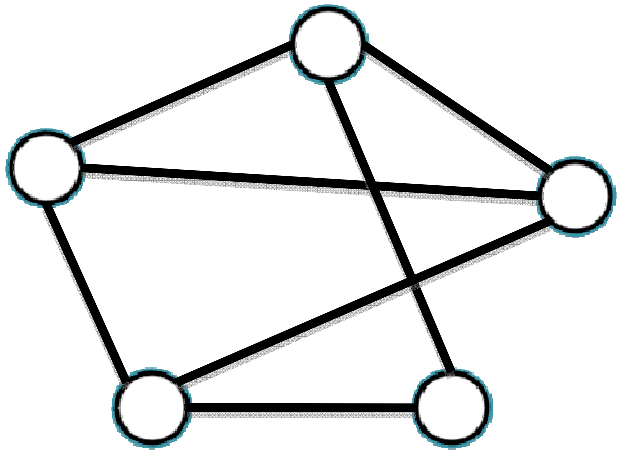
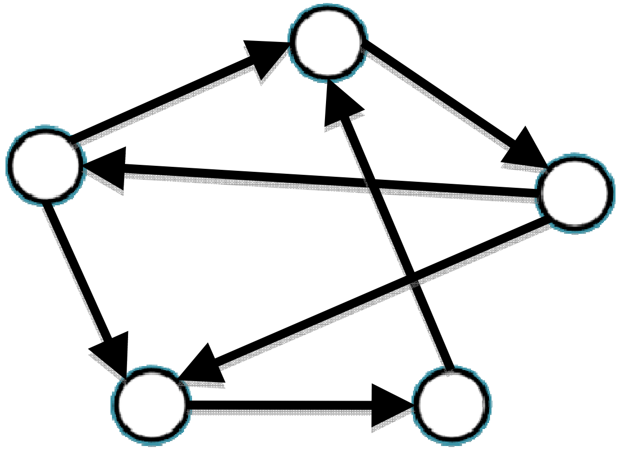
無向グラフと有向グラフ



無向グラフ

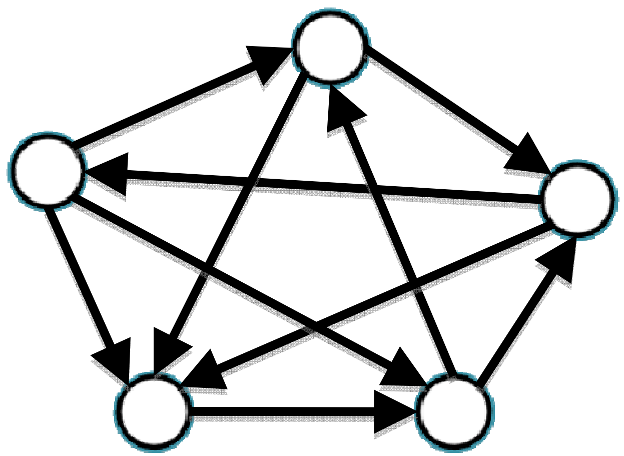


有向グラフ

- グラフは様々な対象がモデル化できる、数学上の重要な概念である。

トーナメント(tournament)

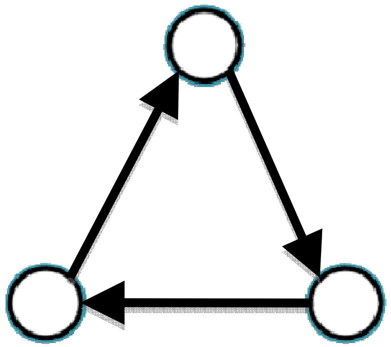
- トーナメント:どの頂点対の間にも、どちらか片方向きの辺がある様な有向グラフ。
- $\forall v,w \in V,\ v \neq w \Rightarrow |\{(v,w),\ (w,v)\} \cap E| = 1$



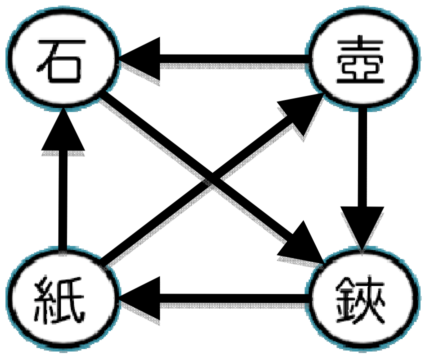
トーナメント

ジャンケンのトーナメント表現

- 手数nのジャンケンはn頂点のトーナメントで表現できる。



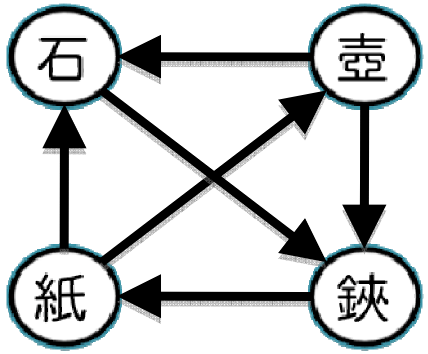
普通のジャンケン



フランス式ジャンケン

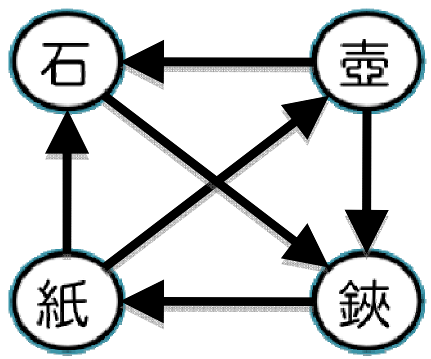
無意味な手

- 定義：トーナメントT=(V,E)で表現されるジャンケンの二つの手v,w∈Vに対し、次の二つの条件を満たす時、wはvに**優越**すると言う。
  - (w,v)∈E
  - ∀u∈Vに対し、(v,u)∈E⇒(w,u)∈E.
- 手vに優越する手が存在するとき、手vは**無駄な**手と言う。



優越性の必要十分条件

- 補題2: $w \in V$が$v \in V$に優越する必要十分条件は
  - 辺$(w,v) \in E$が存在し、かつ
  - vからwへの長さ2の路が存在しないこと
- である。
- 証明：略（ただし簡単）



4手の有効なジャンケン

- 無駄な手が無いジャンケンのことを有効なジャンケンと呼ぶ。
- 4手の有効なジャンケンは存在するか？

- 各手に対し、それが勝つ手の数を勝ち数、負ける手の数を負け数と呼び、「勝ち数p, 負け数q」のことを「p勝q敗」と表現する。（p+q=n−1）

観察

- 命題3: ４手の有効なジャンケンの手には必ず、2勝１敗が二つ、1勝2敗が二つ存在する。
- 証明: 0勝3敗の手は無駄な手となり、3勝0敗の手は他の手を無駄にするので、どちらも存在しない。従って2勝１敗と1勝2敗しか存在し得ないが、勝ち数と負け数の総和が等しいことから、題意を得る。□

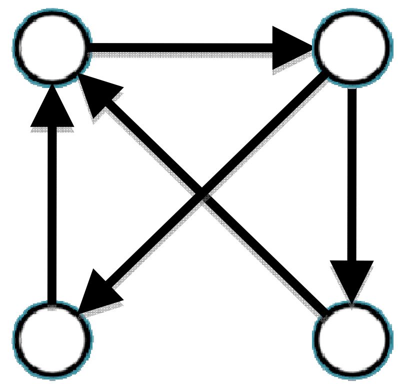
観察

- 命題4: ４手の有効なジャンケンにおいて、ある1勝2敗の手が、ある2勝1敗の手に勝っている組合せが存在する。
- 証明: そうでないと仮定すると、二つの1勝2敗の手がお互いに相手に勝っていることになり、矛盾。□

４手の有効なジャンケンの非存在性

- 補題5: ４手の有効なジャンケンは存在しない。

証明: 命題3,4より、４手の有効なジャンケンは右の形をその部分として持たなければならない。
しかし下の2つの手の敗者が無駄な手になる。□

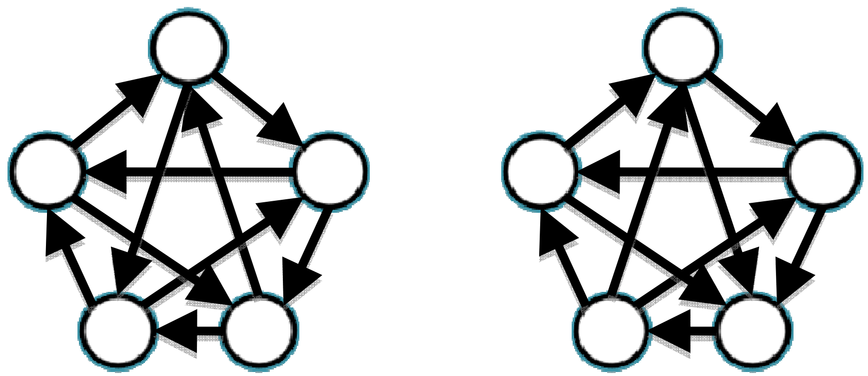


つまり、４手のジャンケンを作れば、
必ず無意味な手が生じる！

n=2,3,4,5のジャンケン

- n=2: 明らかに存在しない。

- n=3: 通常のジャンケンのみ。
- n=4: 存在しない。（補題5）
- n=5:



nが偶数だと存在しない？