悪魔との賭け
ーサンクトペテルスブルグの逆理ー

- 悪魔が君の前に現れてこう言った。
- 「君に大金持ちになれるチャンスをあげよう。これから君がコインを裏が出るまで投げ続けることができる。表が続けて出た回数をk回とすると、君に2^k円あげよう。例えば、表が10回続けて出てから裏が出れば2^{10}=1024円、表が20回続けて出てから裏が出れば2^{20}=約100万円だ。いきなり裏がでてしまえば2^0=1円だけどね。」
- 「さあ、君が得られる賞金の期待値を計算してみたまえ。」

- k回連続して表が出てその直後に裏が出る確率は$(1/2)^{k+1}$。よって賞金の期待値は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\cdot 2^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

- なんと無限大！
- 悪魔は続けて言った「分かったかい？こんな得なゲームは無いよ。ただ、一応参加費を10万円払ってもらうよ。賞金の期待値が無限大なのだから、何円参加費を払おうと君は得なのだが、君が今払える金額ということで10万円にまけておいてあげる。」
- 君はこのゲームに参加しますか？

「悪魔との賭け」のワナ

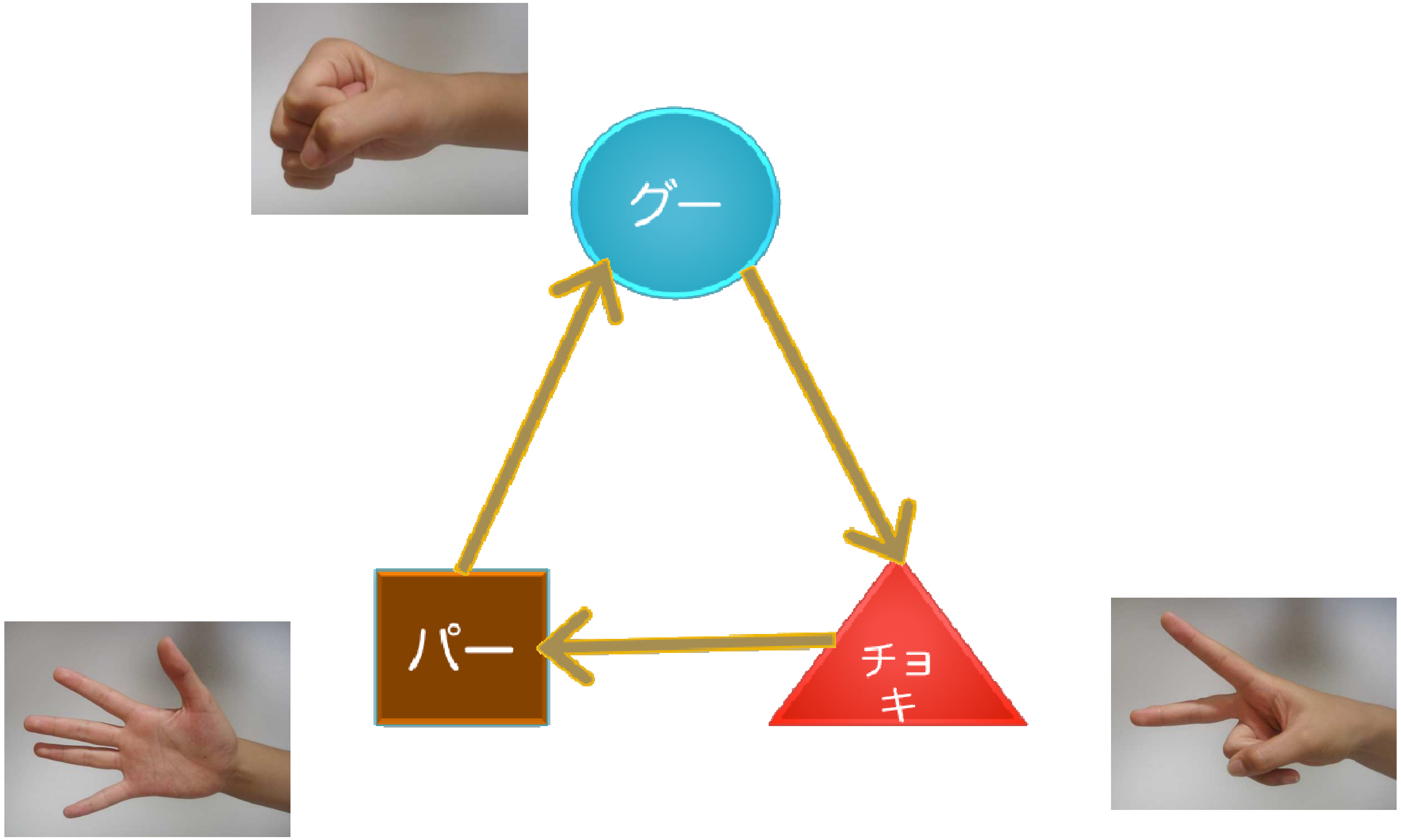
- 期待値の計算結果は「得する」ことを示している。しかしどう考えても損するとしか思えない。どこがおかしいのか？
- 我々が使い切れない程のお金をもらってもどうしようもない。
- 例えば、100京円（一京は一兆の一万倍）貰っても使いようが無い（日本の国家予算はその1万分の一の100兆円ですらない）。

- つまり、賞金が100京円を越えてしまえば、あとはいくら貰っても同じ。
- したがってこのゲームは賞金が2^{60}=約100京円になったら、そこで終了して2^{60}円貰う、というように変更しても、実質的に同じゲーム。
- そのときの期待値は

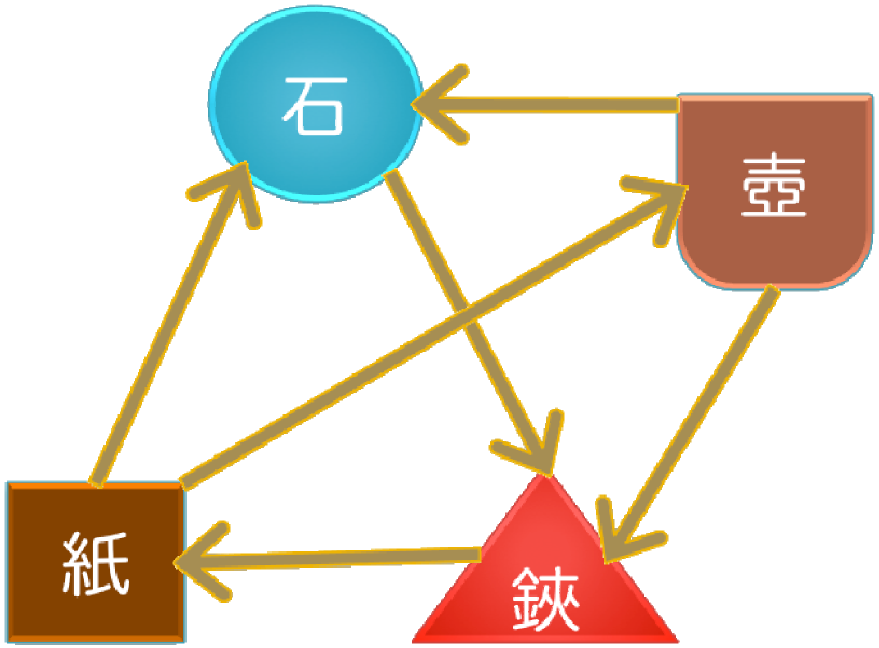
$$\sum_{k=0}^{59} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2^k + \frac{1}{2^{60}} \cdot 2^{60} = \sum_{k=0}^{59} \frac{1}{2} + 1 = 31.$$

- なんと、たったの31円！
- 参加費もその程度にしておくべき！

ジャンケン

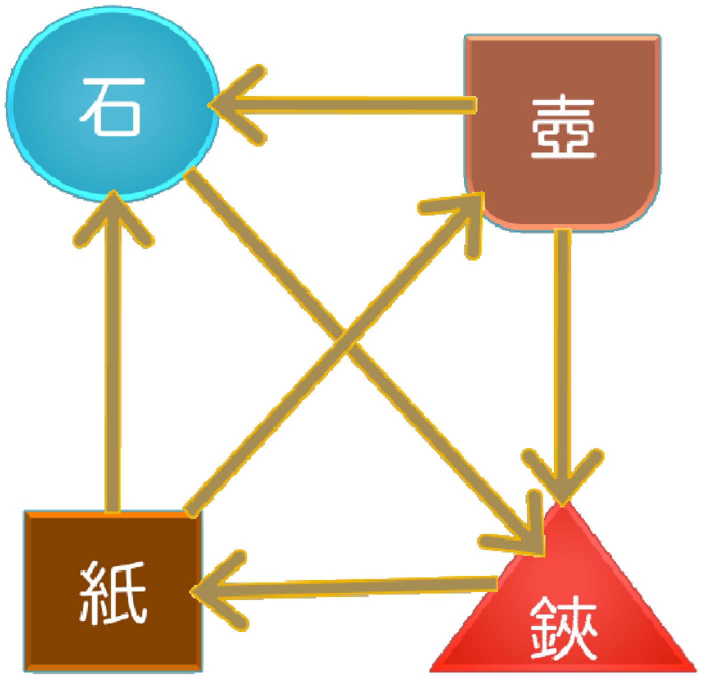


フランス式ジャンケン



- これで面白くなったか？

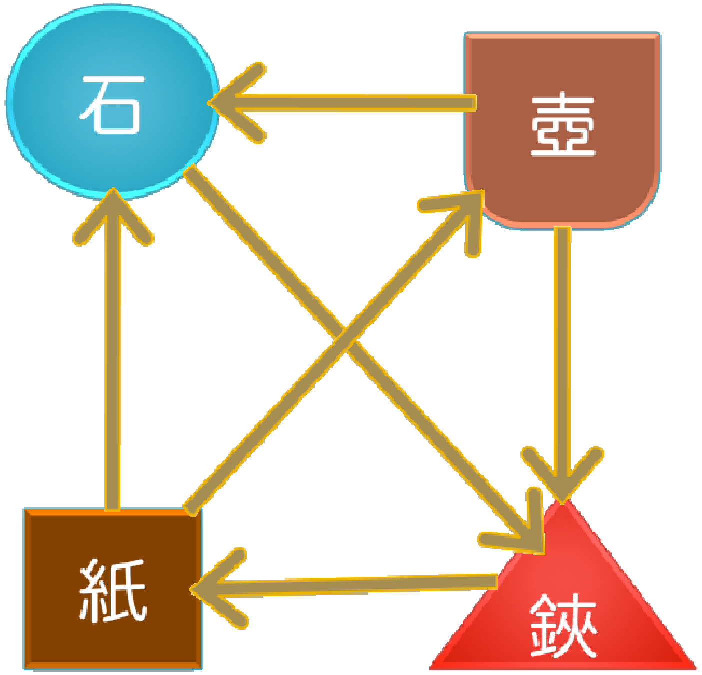
フランス式ジャンケン



- 石と壺の関係に注目
- どちらも紙に負け、鋏に勝つ
- そして壺は石に勝つ

- 石を出すより壺を出した方が得！

フランス式ジャンケン



- 石は誰も使わなくなる。

- 石を壺に置き換えただけ！

4手のジャンケン

- ４つの手を使って、意味の有るジャンケンは作れるか？
- これを議論するためには、何を持って「意味がある」とするかを定義する必要がある。
- グラフ理論を用いる。

グラフ(graph)とは何か？

- グラフ：G=(V,E)
  - V: 頂点集合, E⊆ V ´ V: 辺集合